Espaces vectoriels

Exercice 1. Les espaces suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? (discuter suivant les valeurs des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$) ;

1. Dans $\mathbb{R}^2$:

$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 1\}$; $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 0\}$;
$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$; $E_4 = \{x(1,2) + y(-2,-4) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;
$E_5 = \{x(1,2) + y^2(-1,3) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$; $E_6 = \{\sin x(1,2) + y(-2,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$:

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sin z = x + y\}$; $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$;
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$; $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = x + 3bz = 0\}$;
$E_5 = \{x(1,2,0) + y(1,3,2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$; $E_6 = \{x(1,2,0) + y(-2,-4,1) + (1,3,2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;
$E_7 = \{x(1,2,0) + y(-2,-4,1) + z(1,3,2) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

3. Dans $\mathbb{R}^n$:

$E_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = a\}$; $E_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$;
$E_3 = \{x(a, \ldots, a) + (b, \ldots, b) \mid x \in \mathbb{R}\}$;

Exercice 2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (si et) seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3. Soient $u = (1,2,3,4)$ et $v = (1,-2,3,-4)$. Déterminer l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,1,y,1) \in \mathrm{Vect}(u,v)$. Même question pour les couples tels que $(x,1,1,y) \in \mathrm{Vect}(u,v)$.

Exercice 4. Soit a un paramètre réel. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes (on discutera éventuellement en fonction de a) :

$F_1 = \big((1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,0,1,1).\big) \subset \mathbb{R}^4$;
$F_2 = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,1), (1,-1,1,0), (2,0,1,1), (0,2,-1,1)\big) \subset \mathbb{R}^4$;
$F_3 = \mathrm{Vect}\big((1,2,2,1), (1,-1,1,-1), (2,1,1,2), (0,a,-a,a)\big) \subset \mathbb{R}^4$;

Exercice 5. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la famille de vecteurs $\big((a,1,2,2), (0,a,1,1), (1,0,a,1)\big)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ?

Exercice 6. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$v_0 = (0,0), \quad v_1 = (1,1), \quad v_2 = (1,-1), \quad v_3 = (-3,-3), \quad v_4 = (3,4);$$

et les familles de vecteurs :

$$\mathcal{F}_1 = (v_0), \quad \mathcal{F}_2 = (v_0, v_2), \quad \mathcal{F}_3 = (v_1), \quad \mathcal{F}_4 = (v_1, v_2), \quad \mathcal{F}_5 = (v_1, v_3) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_6 = (v_1, v_2, v_4).$$

Pour k de 1 à 6, dire si la famille $\mathcal{F}_k$ est libre, si elle est génératrice de $\mathbb{R}^2$, et si c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7.

1. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (1,-2)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur $v = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, donner (en fonction de x et y) les coordonnées de v dans cette base.

2. Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, donner (en fonction de x, y et z) les coordonnées de v dans cette base.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 0, 0)$, $v = (1, 2, 0, 0)$, $w = (1, 2, 3, 0)$ et $x = (1, 2, 3, 4)$.

1. Montrer que $B = (u, v, w, x)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $(1, -1, 1, -1)$ dans la base B.
3. Reprendre l'exercice avec $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0, 1)$ et $x = (0, 0, 1, 1)$.

Exercice 9. Soient
$u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (-1, 4, 6)$, $u_3 = (-2, 9, 14)$ et $u_4 = (0, 0, -2)$.

1. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (x, y, z)$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10.

1. Déterminer des équations cartésiennes et une base des sous-espaces vectoriels suivants :
   $E_1 = \text{Vect}\big((1, 3, -1)\big) \subset \mathbb{R}^3$; $E_2 = \text{Vect}\big((1, 2, 3), (1, 1, 1), (2, 5, 8)\big) \subset \mathbb{R}^3$;
   $E_3 = \text{Vect}\big((1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (1, 1, 2, 1)\big) \subset \mathbb{R}^4$.
2. Donner des bases des espaces vectoriels :
   $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$; $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\}$;
   $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$; $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = x + 2y - 3z = 0\}$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $U = \text{Vect}(a, b, c)$ et $V = \text{Vect}(d, e)$, où

$$a = (1, 2, 3, 4), \quad b = (1, 1, 1, 3), \quad c = (2, 1, 1, 1), \quad d = (-1, 0, -1, 2) \quad \text{et} \quad e = (2, 3, 0, 1).$$

1. A-t-on $U + V = \mathbb{R}^4$? et $U \oplus V = \mathbb{R}^4$?
2. Déterminer $U \cap V$.

Exercice 12. Soient $F = \{(x, 2x, x), x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 n x + 2y + z = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Soient $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$.

1. Pour chacune des paires suivantes, déterminer si les deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$:
   (a) $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$; (b) $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_4, v_5)$;
   (c) $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$; (d) $\text{Vect}(v_1, v_4)$ et $\text{Vect}(v_3, v_5)$.
2. Déterminer un supplémentaire de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

Exercice 14. Soient $v_1 = (0, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, -1)$, $v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $v_5 = (0, 0, 0, 1)$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_2, v_3, v_4)$.
3. $\dim\left(\text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_2, v_3, v_4)\right) = 1$.
4. $\text{Vect}(v_1, v_2) + \text{Vect}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$.
5. $\text{Vect}(v_4, v_5)$ est un supplémentaire de $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.